

Литература

1. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем*. Мн.: Беларус. наука, 2012.
2. Зайцев В. А. *Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трёхмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами* // Вестн. Удмуртского ун-та. Сер. Математика. 2003.
3. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С МИНИМАЛЬНЫМИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ЗАТРАТАМИ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь,
{kalininai,lavrinovich}@bsu.by

Численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В сингулярно возмущенных задачах эти динамические системы являются жесткими, и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. В связи с этим возрастает роль асимптотических методов, тем более, что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи на задачи меньшей размерности.

В докладе рассматривается задача оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно возмущенной системе, имеющая вид

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \quad (1)$$

$$\mu \dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_*) = z_*, \quad (2)$$

$$y(t^*) = 0, \quad z(t^*) = 0, \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u' P(t) u dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где μ — малый положительный параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y — вектор медленных переменных, z — вектор быстрых переменных, u — вектор управления, $P(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$.

Предположение 1. Матрица $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Предположение 2. Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка ($N = 0, 1, 2, \dots$), если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N -го порядка, если для любого начального состояния (y_*, z_*, t_*) , $(t_* < t^*)$, имеет место $u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, — асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в задаче (1)–(3).

Целью исследования рассмотренной задачи, которую можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами, является построение асимптотических приближений к ее решению в виде программы и обратной связи. Суть применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных — конечномерных элементов, по которым можно легко восстановить решение задачи. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения двух невозмущенных задач оптимального управления с n и m фазовыми переменными соответственно, называемых базовыми. Первой из них является вырожденная задача:

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \quad y(t^*) = 0, \quad J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (u'P(t)u) dt \rightarrow \min,$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$.

Предположение 3. Динамическая система в первой базовой задаче является вполне управляемой.

Вторая базовая задача имеет вид:

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, \quad z(0) = -A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)u^0(t^*),$$

$$z(-\infty) = 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u'(s)P(t^*)u(s)) ds \rightarrow \min,$$

где $u^0(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, — оптимальное управление в вырожденной задаче.

Предположение 4. Динамическая система во второй задаче является вполне управляемой.

Теорема. При выполнении предположений 1–4 решению задачи (1)–(3) с достаточно малым μ соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных $(\psi_1^0(t, \mu), \psi_2^0(t, \mu))$, $t \in [t_*, t^*]$. Величины $\lambda(\mu) = \psi_1^0(t^*, \mu)$, $\nu(\mu) = \psi_2^0(t^*, \mu)$, являющиеся определяющими элементами задачи (1)–(3), допускают асимптотические разложения

$$\lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k, \quad \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \nu_k,$$

в которых $\nu_0 = \sigma_0 - (A_2(t^*)A_4^{-1}(t^*))^\top$, а λ_0 , σ_0 — значения сопряженных переменных на правом конце траекторий соответственно в первой и второй базовых задачах.

Доказательство теоремы является конструктивным и предопределяет дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений. В частности, вектор-функция

$$u^{(0)}(y, z, t, \mu) = -P^{-1}(t)(B_0^\top(t)F_0^\top(t) + B_2^\top(t)G^\top((t - t^*)/\mu)C_0)C_1^{-1}F_0(t)y$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в исходной задаче. Здесь $F_0(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, — $(n \times n)$ -матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0 = -F_0 A_0(t), \quad F_0(t^*) = E_n,$$

$G(s)$, $S \leq 0$, — $(m \times m)$ -матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}\frac{dG}{ds} &= -GA_4(t^*), \quad G(0) = E_m, \\ C_1 &= \int_{t_*}^{t^*} \Phi_0(t)P^{-1}(t)\Phi_0^\top(t) dt, \quad \Phi_0(t) = F_0(t)B_0(t), \\ C_0 &= C_3^{-1}A_4^{-1}B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_0^\top(t^*), \\ C_3 &= \int_{-\infty}^0 (\Pi\Phi(s)P^{-1}(t^*)\Pi\Phi^\top(s)) ds, \quad \Pi\Phi(s) = G(s)B_2(t^*).\end{aligned}$$

Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных z .

К ВОПРОСУ О РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А.А. Козлов

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
kozlovaa@tut.by

Пусть \mathbb{R}^n — n -мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ (здесь символ $^\top$ означает операцию транспонирования вектора или матрицы).

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов A и B . Если матрица B принадлежит также и пространству интегрируемых с квадратом матричных функций, то имеет место

Определение 1 [1]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой (по Калману)*, если найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при всяких $t_0 \geq 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнено неравенство

$$\xi^\top \int_{t_0}^{t_1} X(t_0, \tau)B(\tau)B^\top(\tau)X^\top(t_0, \tau) d\tau \xi \geq \alpha \|\xi\|^2, \quad (2)$$

где $X(t, s)$, $t, s \geq 0$, — матрица Коши системы (1) с нулевым управлением.

Очевидно, что данное определение выражено в терминах матрицы Коши $X(t, s)$ системы (1) с нулевым управлением и матрицы B при управлении. Поскольку матрица Коши абсолютно непрерывна, то вопрос о существовании интеграла в (2) сводится к вопросу интегрируемости с квадратом матрицы B . Если последняя не интегрируема с квадратом, то этот интеграл не существует, а, значит, для систем (1) с такой матрицей B определение 1 не имеет смысла. Е.Л. Тонковым [2] было введено иное определение равномерной полной управляемости, эквалентное определению 1 в случае интегрируемости с квадратом матрицы B , которое также имеет место и для случая, когда матрица при управлении не принадлежит пространству интегрируемых с квадратом функций.